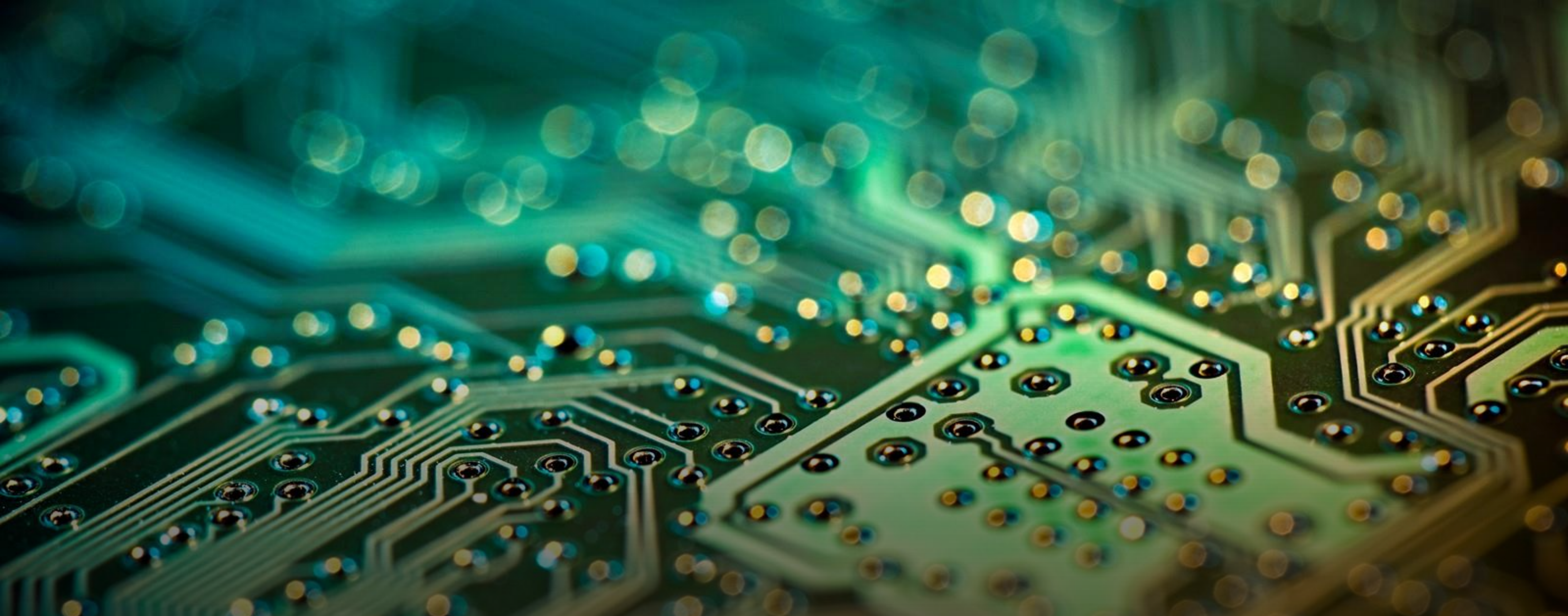
OSNOVE DIGITALNE ELEKTRONIKE

Minimizacija logičkih funkcija

Zdravko Kunić
zdravko.kunic@algebra.hr



Minimizacija logičkih funkcija

Ishod 4	Minimizirati i implementirati složene logičke funkcije uporabom osnovnih logičkih sklopova. Implementirati složene logičke funkcije uporabom složenih logičkih sklopova.

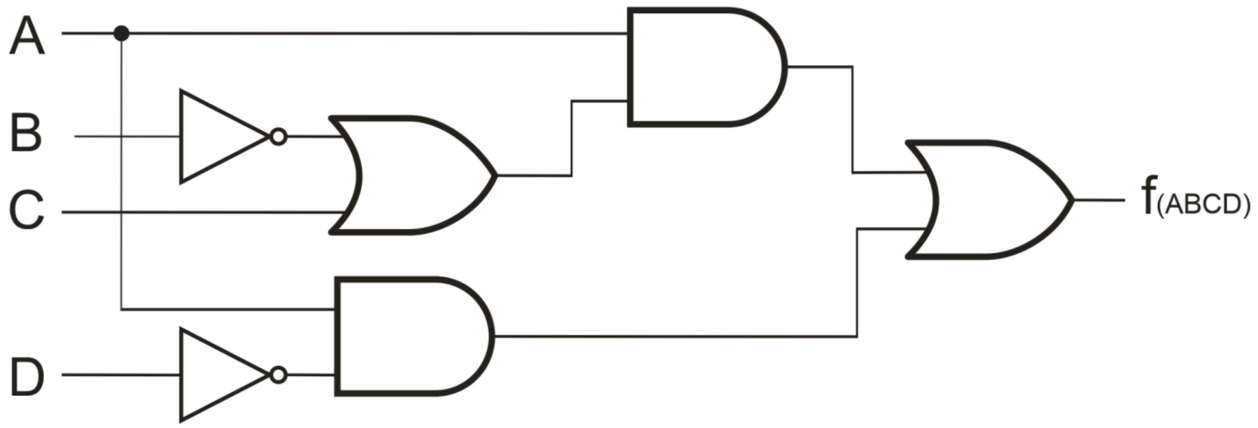
Sadržaj predavanja

- Minimum Booleove funkcije
- K tablice
- Minimizacija K tablicama

Booleova funkcija

- Booleova funkcija je opis digitalnog sklopa:
  - operator ⇔ osnovni logički sklop
  - izraz koji utvrđuje Booleovu funkciju ⇔ sklop

$$f = A(\overline{B} + C) + A\overline{D}$$



Minimizacija logičke funkcije

- Postupak svođenja funkcije na minimalan broj elemenata
- Određivanje izraza unutar velikog broja ekvivalentnih izraza, koji zadovoljava kriterije jednostavnosti
- Pronalaženje izraza koji minimizira odabranu **mjeru složenosti** za zadanu funkciju od n varijabli iz skupa mogućih funkcija:
  - Realizacija logičkog sklopa s najmanjim brojem elemenata, donosi:
    - Smanjenje cijene, potrošnje i veličine
    - Povećanje brzine i pouzdanosti
- Niti jedan postupak minimizacije ne vodi do jedinstvenog rješenja
  - Često je moguće dobiti više različitih izraza za istu funkciju, a svi imaju isti broj elemenata

Minimum Booleove funkcije

- Zapis logičke funkcije:
  - s najmanjim brojem **logičkih operatora**
  - s najmanjim brojem **ulaznih varijabli**
- Kontradiktorni kriteriji jednostavnosti (uobičajeno u inženjerskoj praksi):
  - **Najveća brzina rada** sklopa
  - **Najjeftinije ostvarenje**

Kriterij minimizacije:

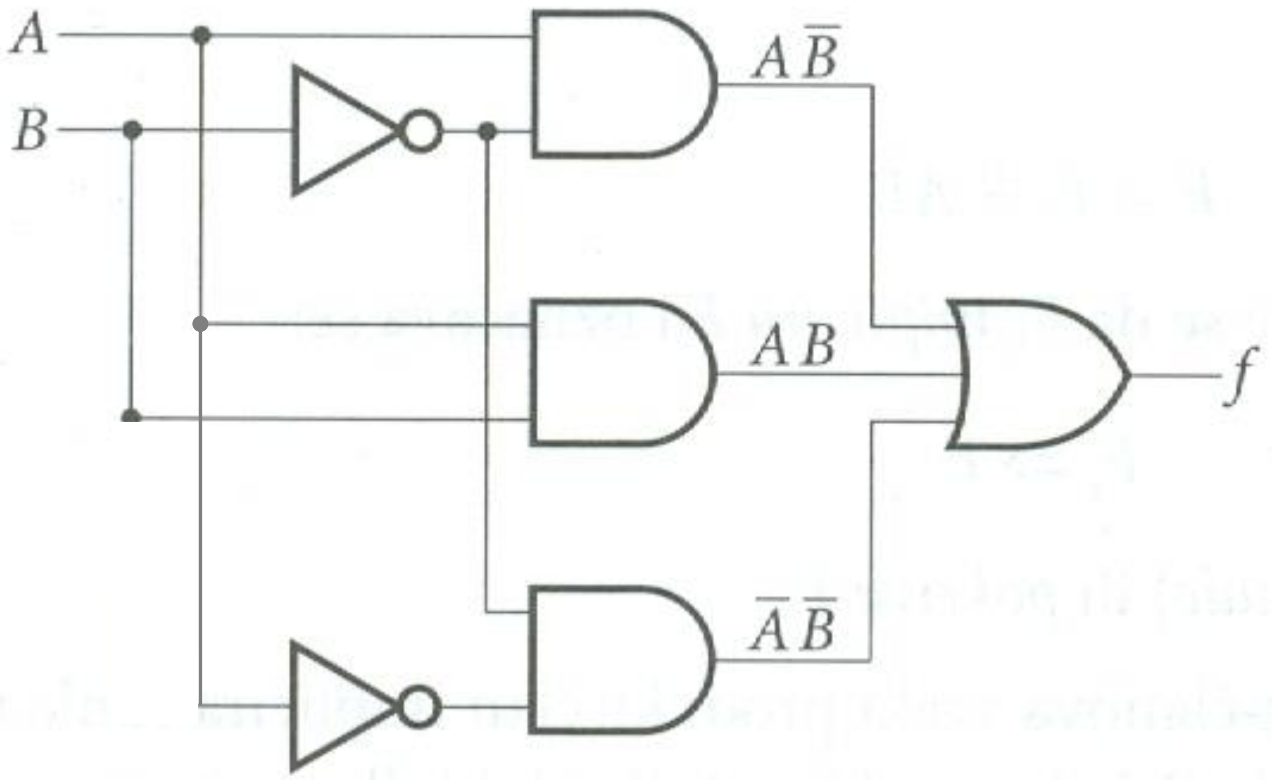
Izraz u obliku sume produkata se smatra minimiziranim ako ne postoji:

- niti jedan drugi ekvivalentni izraz s manje produkata
- niti jedan drugi ekvivalentni izraz s istim brojem produkata, ali manjim brojem literala
  - Literal predstavlja varijablu (ili njezin komplement)

Nema sustavnog algebarskog postupka koji vodi do minimalnog izraza!

Minimizacija - primjer

$$f = A\overline{B} + AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

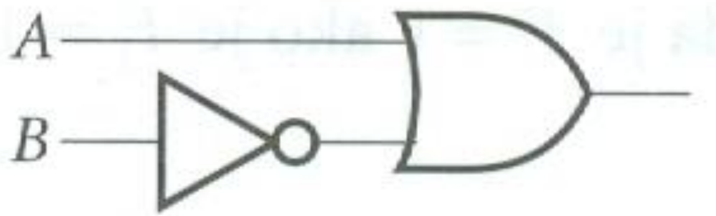


Minimizacija – rješenje 1:

$$\begin{aligned} f &= A\overline{B} + A\overline{B} + AB + \overline{A}\,\overline{B} \\ &= A\left(\overline{B} + B\right) + \overline{B}\left(A + \overline{A}\right) \\ &= A + \overline{B} \end{aligned}$$

Minimizacija – rješenje 2:

$$\begin{aligned} f &= A(\overline{B} + B) + \overline{A}\,\overline{B} \\ &= A + \left(\overline{A}\,\overline{B}\right) \\ &= (A + \overline{A})\left(A + \overline{B}\right) \\ &= A + \overline{B} \end{aligned}$$



K-tablice (Karnaughove tablice)

Grafički prikazi Booleovih funkcija u obliku 2D tablica

- **Polja** predstavljaju standardne članove (produkte/sume)
  - susjedna polja se razlikuju u samo jednoj varijabli! (kao kod Grayevog kôda)

A	B	f
0	0	α_0
0	1	α_1
1	0	α_2
1	1	α_3

f(A,B)		A	
		0	1
B	0	α_0	α_2
	1	α_1	α_3

(M. Karnaugh, 1953)

K-tablice

- Grafičke strukture s 2^n polja za prikaz
- „Pravokutne koordinate”, Grayev kod (d_{min} = 1)
- Minimizacija se svodi na "grupiranje" polja
  - temeljeno na ljudskoj sposobnosti raspoznavanja uzoraka (1 i 0)
- K-tablice za $n > 2$ varijable su simetrične oko jedne stranice
  - superpozicija
- Praktična primjena: $n \leq 6$

Izgradnja K- tablice

f(A,B)

B \ A	0	1
0	0	2
1	1	3

f(A,B,C)

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

f(A,B,C,D)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

$$13 = 1101 \equiv AB\bar{C}D$$

$$12 = 1100 \equiv AB\bar{C}\bar{D}$$

$$15 = 1111 \equiv ABCD$$

$$09 = 1001 \equiv A\bar{B}\bar{C}D$$

$$05 = 0101 \equiv \bar{A}B\bar{C}D$$

Izgradnja K- tablica

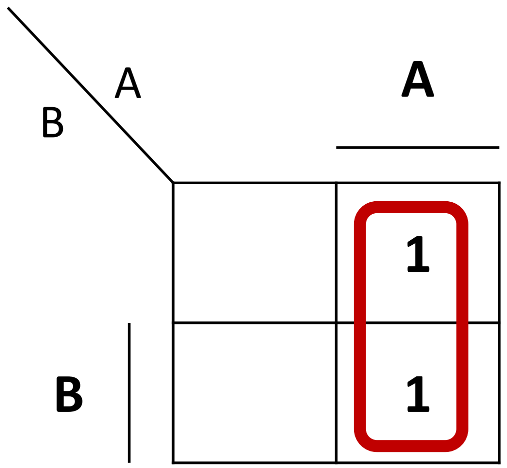
C \ AB (A = 11, 10; B = 01, 11)

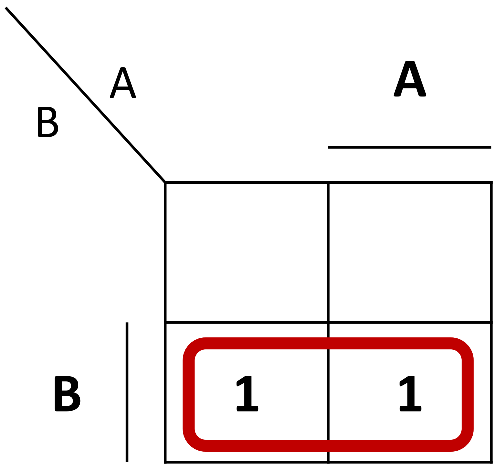
C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1 (C)	1	3	7	5

CD \ AB (A = 11, 10; B = 01, 11; C = 11, 10; D = 01, 11)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

Minimizacija (suma minterma)





$$f = A\overline{B} + AB = A\left(B + \overline{B}\right) = A$$

$$f = \overline{A}B + AB = B(\overline{A} + A) = B$$

Zakon simplifikacije (T8)

Minimizacija (suma minterma)

B \ A		A
	$\bar{A}\,\bar{B}$	$A\,\bar{B}$
B	$\bar{A}\,B$	$A\,B$

B \ A		A
		1
B	1	1

B \ A		A
	$\boldsymbol{m_0}$	
B		$\boldsymbol{M_0}$

$$f = A\bar{B} + AB + \bar{A}B = A\bar{B} + AB + AB + \bar{A}B = A(B+\bar{B}) + B(A+\bar{A}) = \boldsymbol{A+B}$$

K-tablice s 3 varijable

Članovi s 2 susjedne jedinice:

A

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	
1	1			1

C

B

A

C \ AB	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

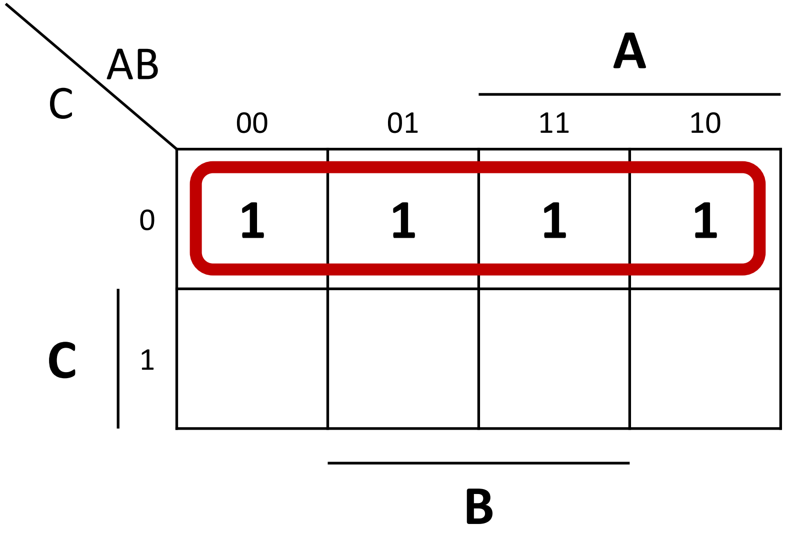
C

B

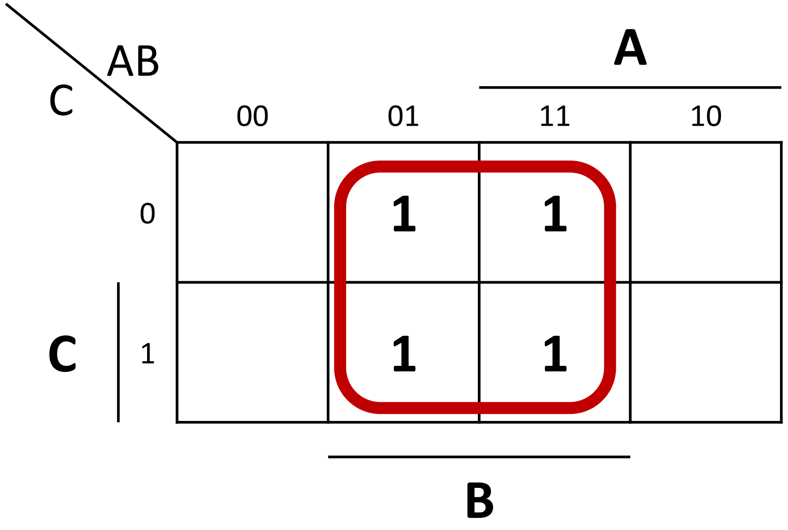
Susjedne ćelije

K-tablice s 3 varijable

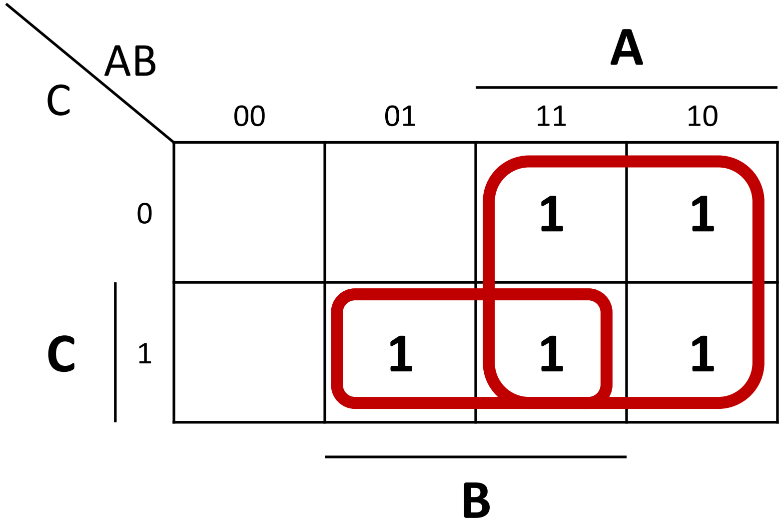
Članovi s 4 susjedne jedinice



$$f = \overline{C}$$



$$f = B$$



$$f = A + BC$$

K-tablice s 4 varijable

Članovi s 2 susjedne jedinice

Članovi s 4 susjedne jedinice

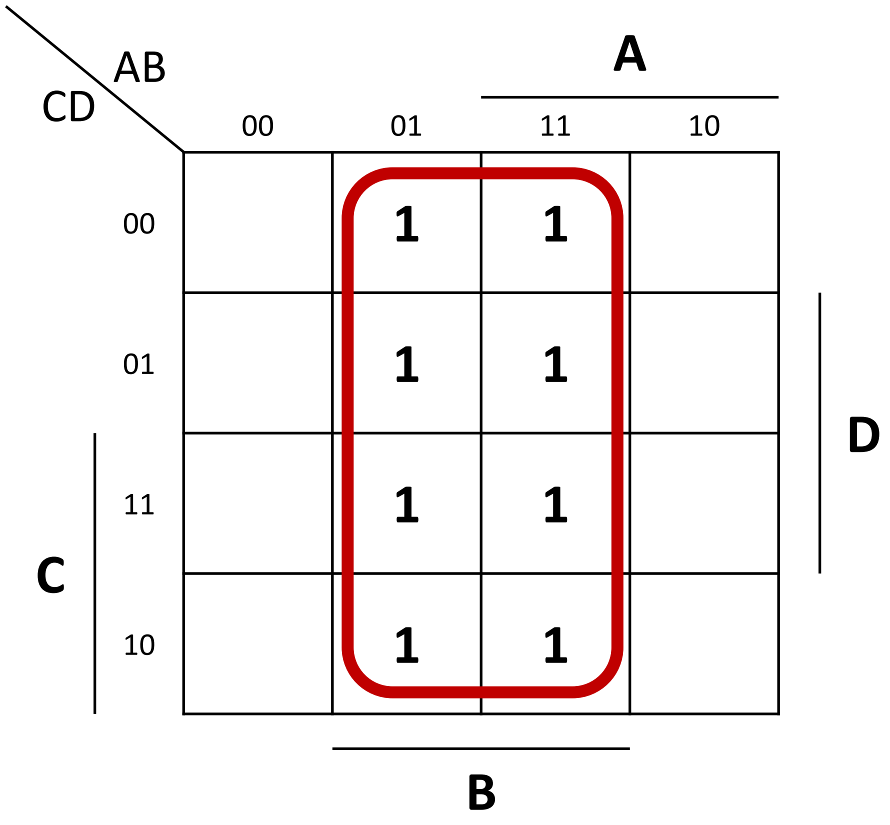
Minimizirana funkcija:

$$f = \overline{A}C + B\overline{C}\,\overline{D}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00		1	1	
01				
11	1	1		
10	1	1		

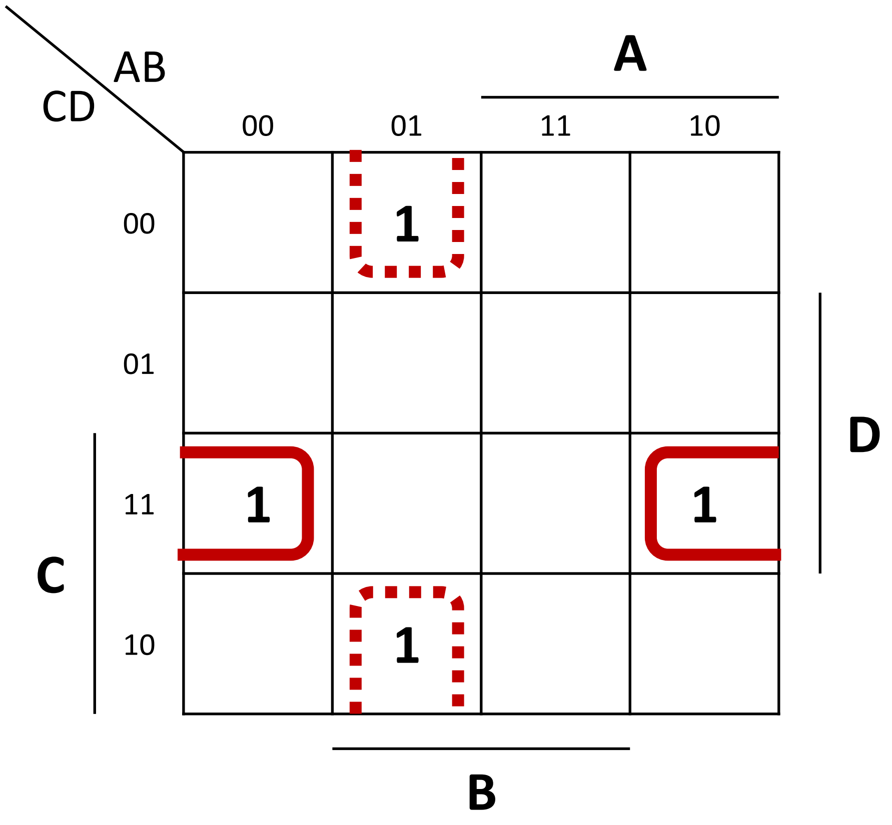
A (AB = 11, 10), B (AB = 01, 11), C (CD = 11, 10), D (CD = 01, 11)

K-tablice s 4 varijable



Članovi s 8 susjednih jedinica

$$f = B$$



Susjednost krajnjih redaka i stupaca

$$f = \overline{A}B\overline{D} + \overline{B}CD$$

Upis funkcije u K tablicu

- Funkcija u obliku **sume minterma:**

$$\sum m_i$$

1 za svaki m_i (ostalo su 0)

- Funkcija u obliku **produkta maksterma**:

$$\prod M_i$$

0 za svaki M_i (ostalo su 1)

Upis funkcije u K-tablicu

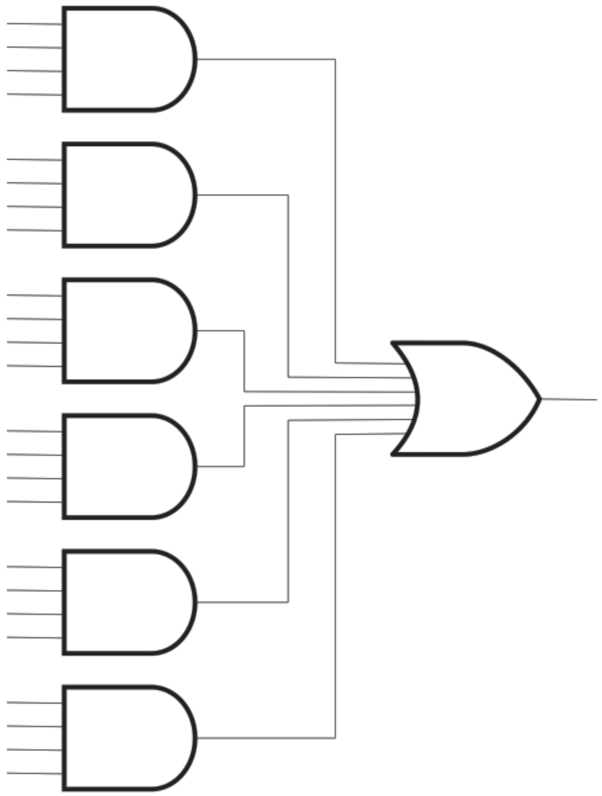
$$f(A,B,C,D) = \sum m(5,6,9,10,13,14)$$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01		**1**	**1**	**1**
11				
10		**1**	**1**	**1**

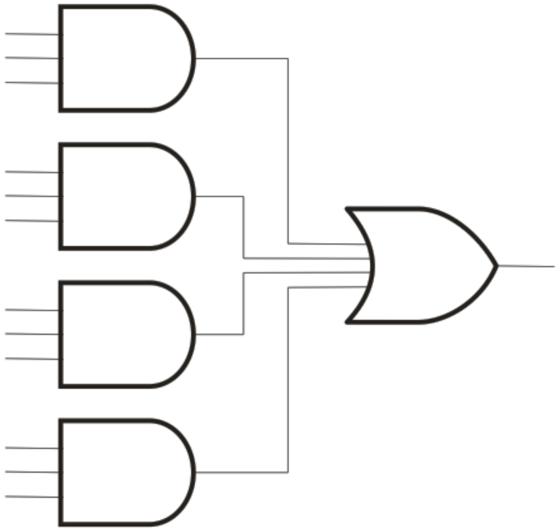
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

Primjer minimizacije pomoću K-tablice

$$f(A,B,C,D) = \sum m(5,6,9,10,13,14) \quad \Longrightarrow \quad f(A,B,C,D) = B\bar{C}D + A\bar{C}D + BC\bar{D} + AC\bar{D}$$



CD \ AB	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11				
10		1	1	1

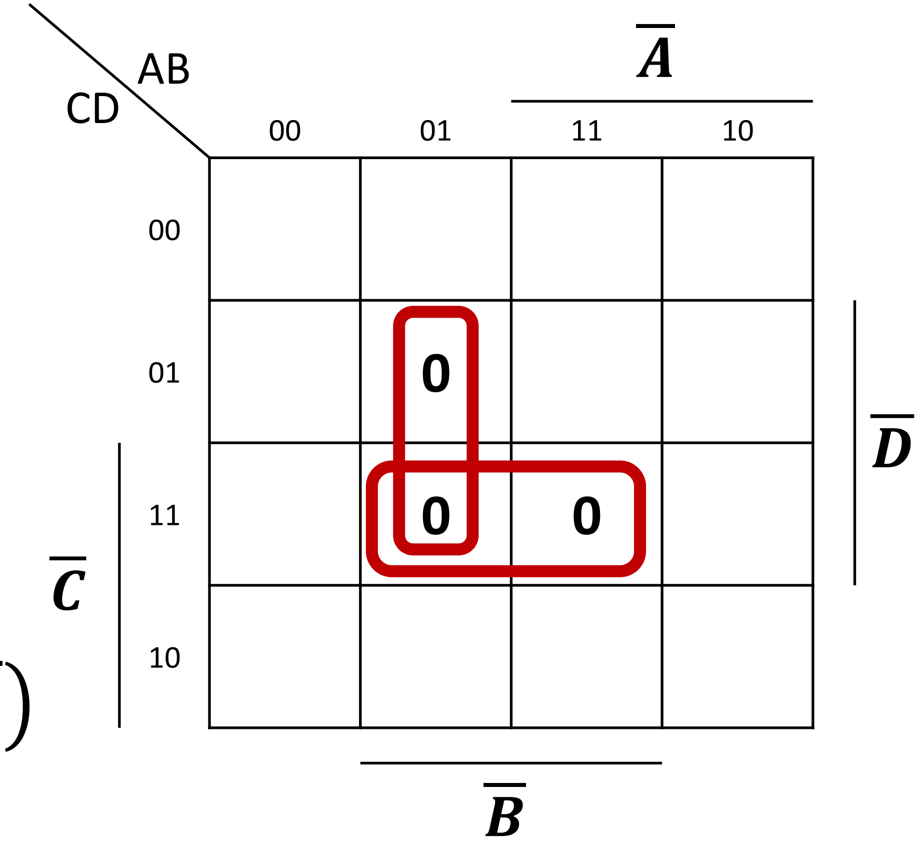


Minimizacija funkcije specificirane u obliku produkta maksterma:

$$f = \prod M(5,7,15)$$

- Postupak kao kod minterma, ali se zaokružuju 0
- Rezultat je produkt suma

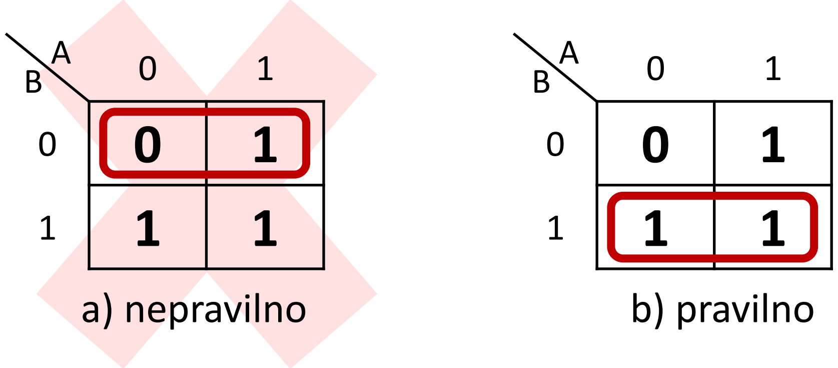
$$f(A,B,C,D) = \left(A + \overline{B} + \overline{D}\right) \cdot \left(\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}\right)$$



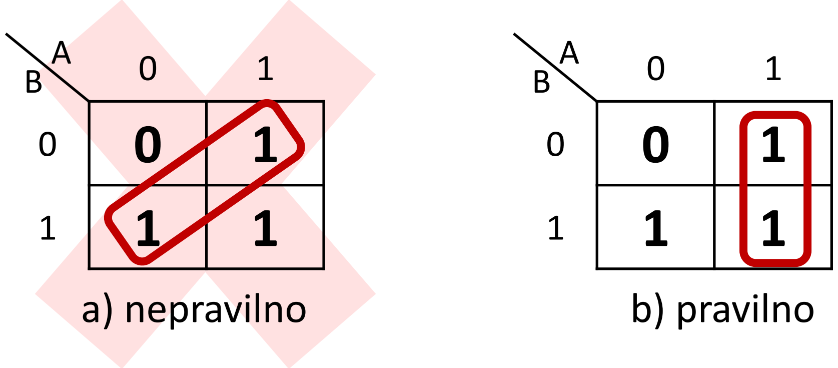
Opća pravila grupiranja jedinica u K-tablici

- Grupiramo minterme (1) ako su u istom redu ili u istom stupcu
  - Ne grupiramo jedinice dijagonalno!
- Veličina grupe mora biti **potencija broja 2**
- Grupa mora biti **najveća moguća** (koristiti što manji broj grupa)
- Svi mintermi (1) moraju biti iskorišteni, čak i ako su samostalni
- Dozvoljeno je preklapanje grupa
- Dozvoljeno je omatanje grupa

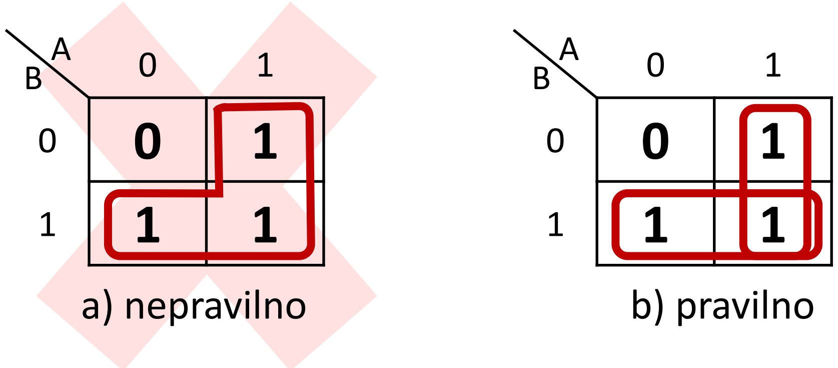
Pravila grupiranja



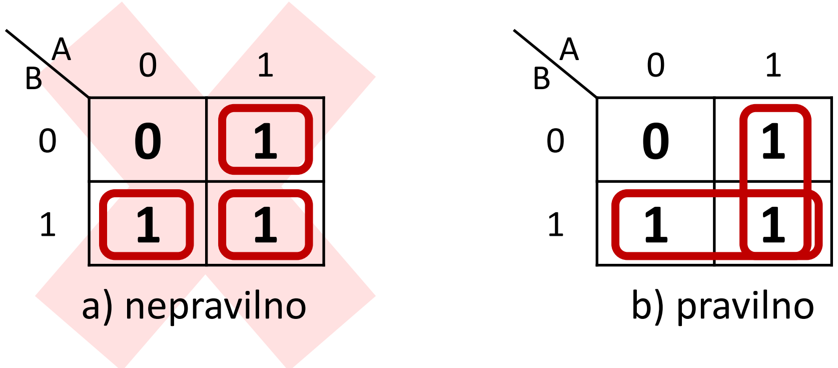
a) Grupe sadrže samo jedinice



b) Dijagonalne grupe nisu dozvoljene



c) Veličina grupe je potencija broja 2



d) Grupe moraju biti najveće moguće

Nepotpuno specificirane funkcije

- Parcijalne funkcije
- Neke kombinacije argumenata se ne pojavljuju:
  - funkcijska vrijednost nije specificirana, X (engl. don’t care)
  - X se interpretira onako kako najbolje odgovara pri minimizaciji (joker)!
- Pri postupku minimizacije je nužno pokriti sve **1**, ali ne i sve **X**
- X se interpretira kao 1 (X = 1) samo ako se time može proširiti zaokruženje
- Veće zaokruženje ~ jednostavniji Booleov izraz = jednostavniji sklop!

Primjer minimizacije nepotpuno specificirane funkcije

$$f = \sum m(2,5,15) + \sum d(0,1,3,4,7,9,13,14)$$

Bez minimizacije:

$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + ABCD$$

Minimizirano:

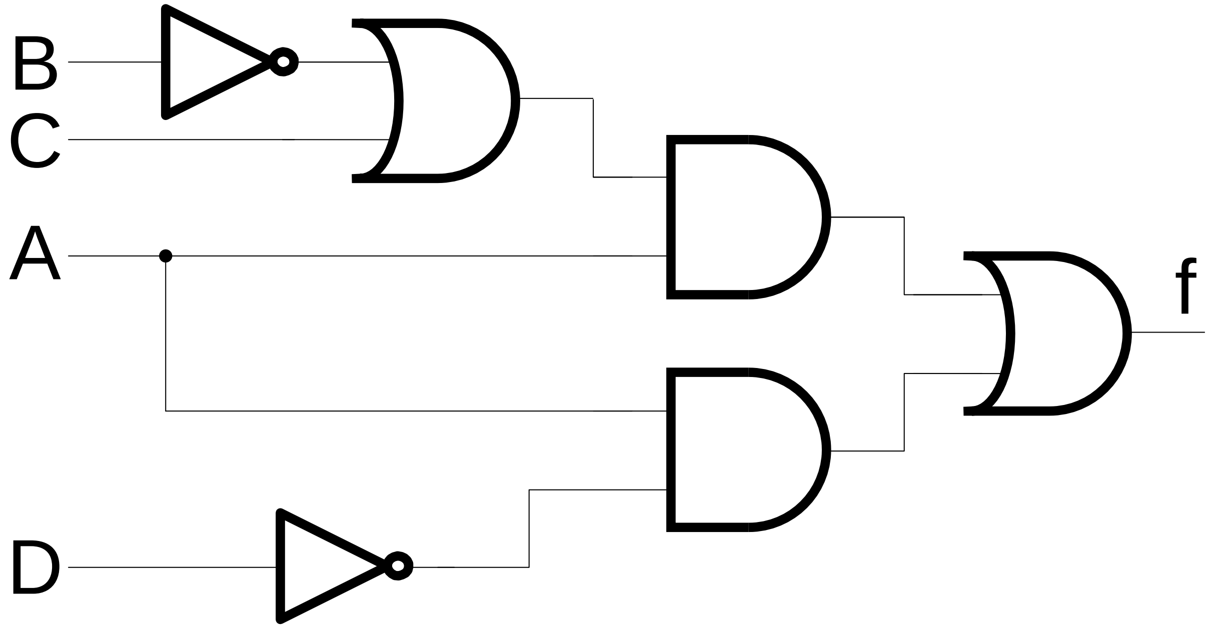
$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\,\bar{B} + BD$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	X	X		
01	X	1	X	X
11	X	X	1	
10	1		X	

Minimizacija logičkih funkcija

Zadatci za vježbu

Algebarski minimizirajte zadani sklop



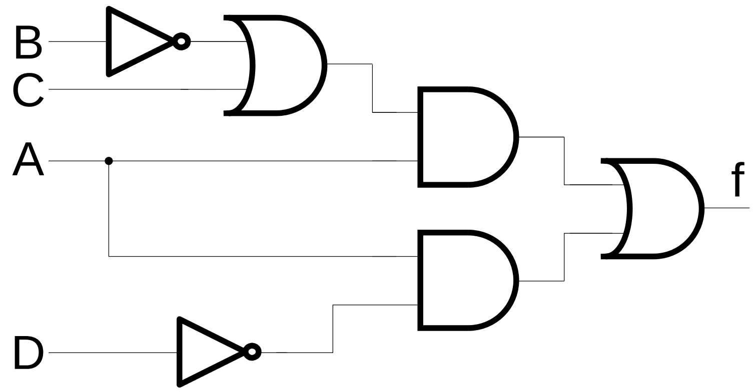
Rješenje

Aksiomi:

4. a) $\boldsymbol{A(B+C) = AB + AC}$
   b) $\boldsymbol{A + BC = (A+B)(A+C)}$

Teorem:

5. a) $\boldsymbol{(A+B)+C = A+(B+C)}$
   b) $\boldsymbol{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$

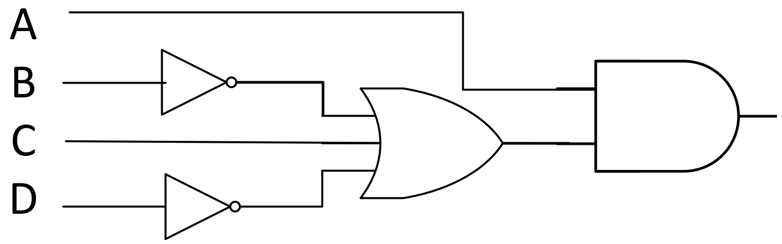


$$f = A(\overline{B} + C) + A\overline{D}$$

Supstitucija: $\boldsymbol{X = (\overline{B} + C);\ Y = \overline{D}}$

Aksiom 4.a: $\boldsymbol{AX + AY = A(X+Y)}$

Supstitucija za X i Y: $\boldsymbol{= A[(\overline{B} + C) + \overline{D}]}$



$$f = A(\overline{B} + C + \overline{D})$$

Algebarska metoda minimizacije - primjer

$f = B\overline{C} + \overline{A}(\overline{A} + \overline{C})(B + C)$	
$= B\overline{C} + \overline{A}(B + C)$	T.4.
$= B\overline{C} + \overline{A}B + \overline{A}C)$	A.4.
$= B\overline{C} + \overline{A}B(C + \overline{C}) + \overline{A}C$	A1., A.4.
$= B\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}C$	A.4.
$= B\overline{C}(1 + \overline{A}) + \overline{A}C(B + 1)$	A.1., A.4.
$= B\overline{C} + \overline{A}C$	A.2., T.1.

Axioms:

1. a) $\boldsymbol{A + 0 = A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 1 = A}$
2. a) $\boldsymbol{A + \overline{A} = 1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot \overline{A} = 0}$

Theorems:

1. a) $\boldsymbol{A + 1 = 1}$ b) $\boldsymbol{A \cdot 0 = 0}$
4. a) $\boldsymbol{A + AB = A}$ b) $\boldsymbol{A \cdot (A + B) = A}$

Projektirajte digitalni sklop za glasanje

Svaki član odbora od 3 člana ima prekidač za glasanje.

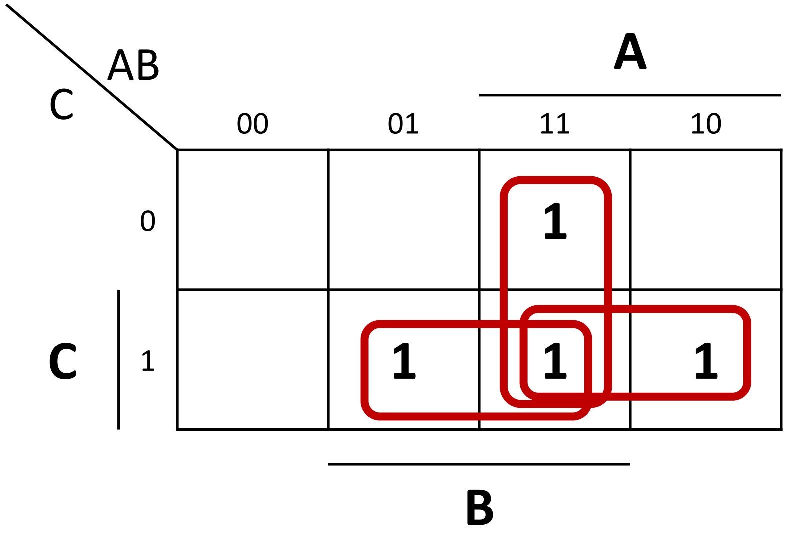
Prekidač ima dva položaja označena s DA i NE.

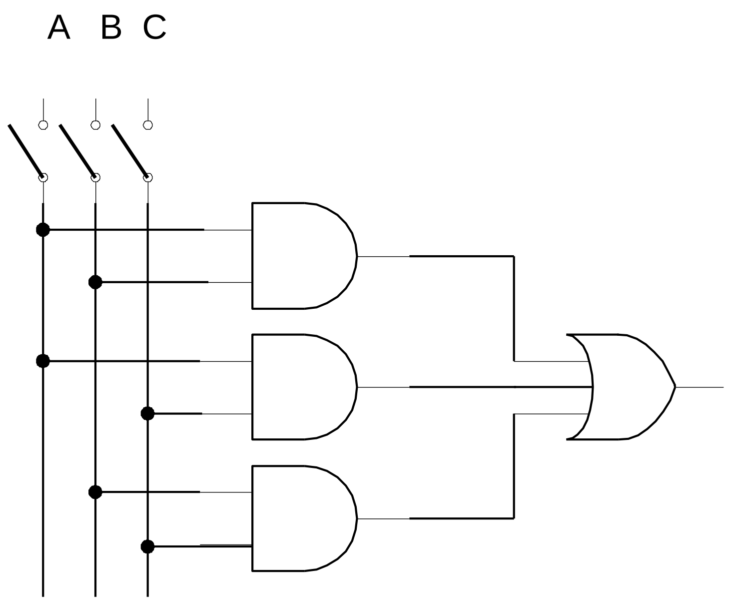
Prijedlog koji se stavi na glasanje je usvojen ako je za njega glasala većina članova.

1) Članove odbora označite s A, B i C.
2) Položajima prekidača DA i NE pridružite vrijednosti 0 i 1.
3) Usvojenom prijedlogu (oznaka y) pridijelite značenje 1.
4) Konstruirajte tablicu kombinacija.
5) Napišite logičku jednadžbu.
6) Minimizirajte sklop i nacrtajte ga.

Rješenje

A	B	C	y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	1
1	0	0	
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1





$$f = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

$$f = AB + AC + BC$$

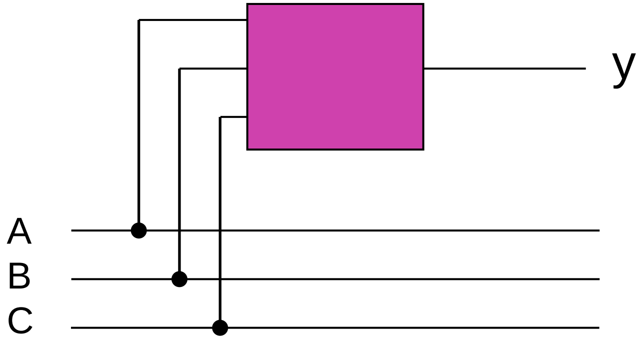
Zadatak

Projektirajte sklop za generiranje neparnog paritetnog bita za grupu od 3 binarne znamenke, A, B i C.

1) Nacrtajte blok shemu uređaja
2) Konstruirajte tablicu kombinacija
3) Minimizirajte
4) Napišite funkciju i nacrtajte sklop

Rješenje (1/2)

A	B	C	y
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	1
1	0	0	
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	



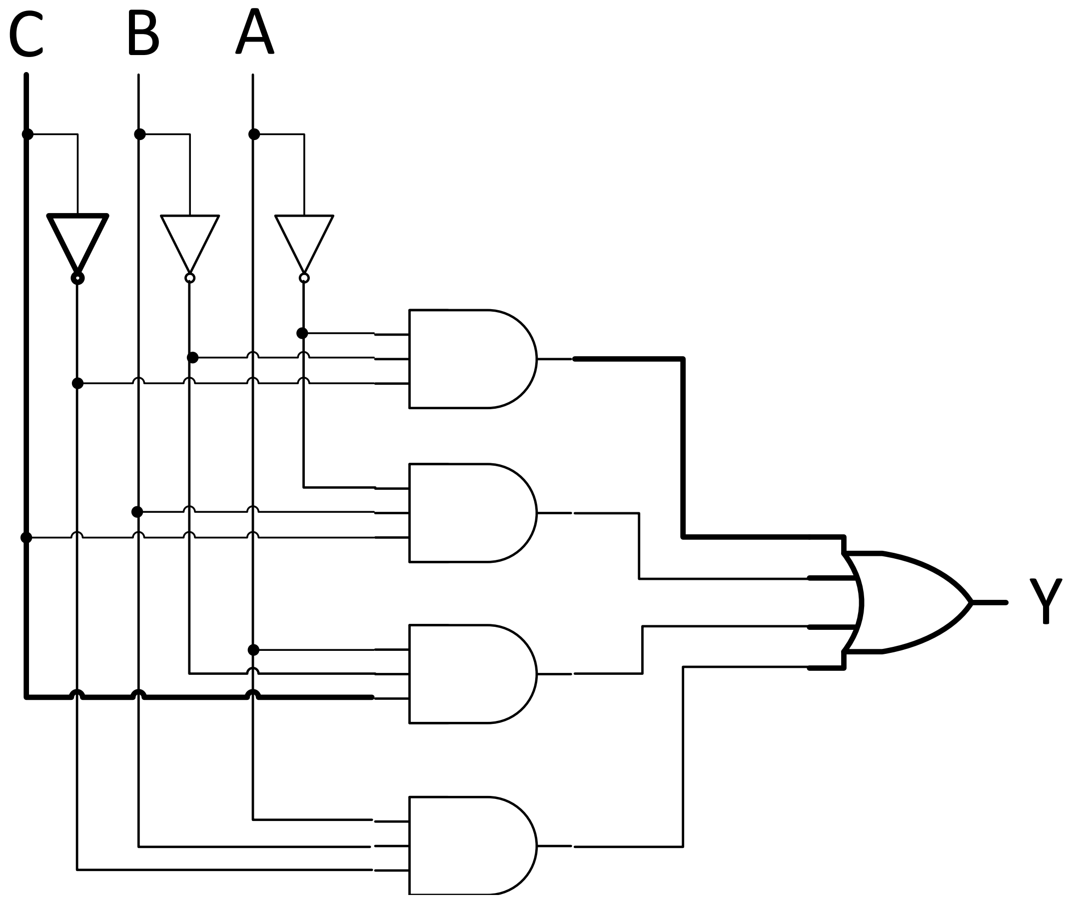
C \ AB	00	01	11	10
0	1		1	
1		1		1

Minimizacija K-tablicom nije moguća

$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Rješenje (2/2)

A	B	C	y
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	1
1	0	0	
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	



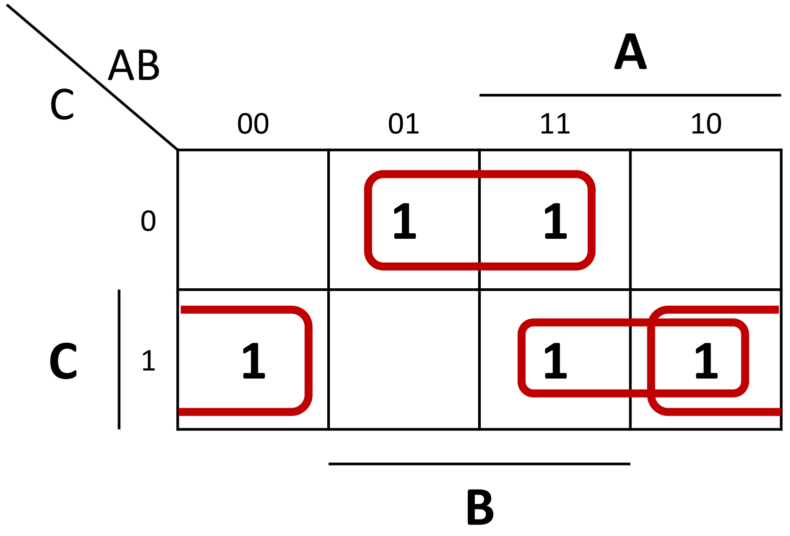
$$f = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

Minimizirajte funkciju

$$f(A, B, C) = \sum(1, 2, 5, 6, 7)$$

Rješenje

A	B	C	y
0	0	0	
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



$$y = f(A,B,C) = \sum(1,2,5,6,7)$$

$$f = \overline{B}C + B\overline{C} + AC$$

Minimizirajte funkciju

$$f(A, B, C) = \sum(0, 2, 4, 6)$$

Rješenje

A	B	C	y
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	1
0	1	1	
1	0	0	1
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	

C \ AB	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1				

A

C

B

$$y = f(A, B, C) = \sum (0, 2, 4, 6)$$

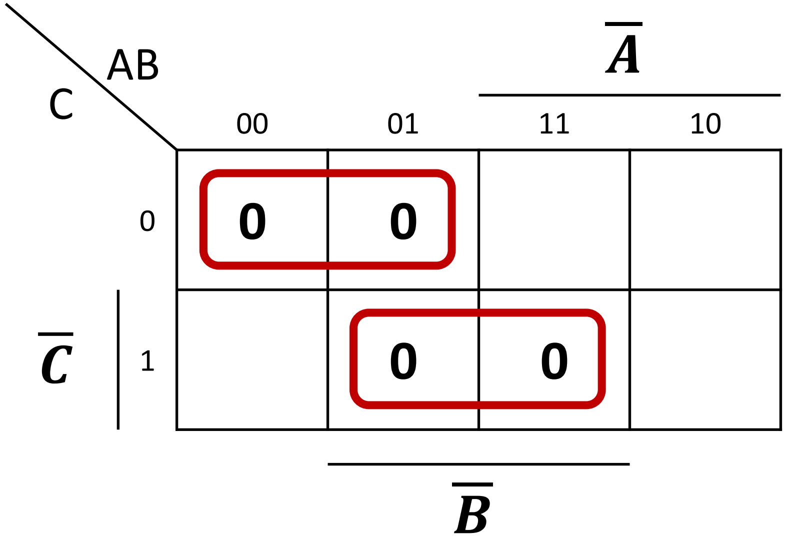
$$f = \overline{C}$$

Minimizirajte funkciju

$$f(A, B, C) = \prod(0, 2, 3, 7)$$

Rješenje

A	B	C	y
0	0	0	0
0	0	1	
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	0



$$y = f(A,B,C) = \prod (0,2,3,7)$$

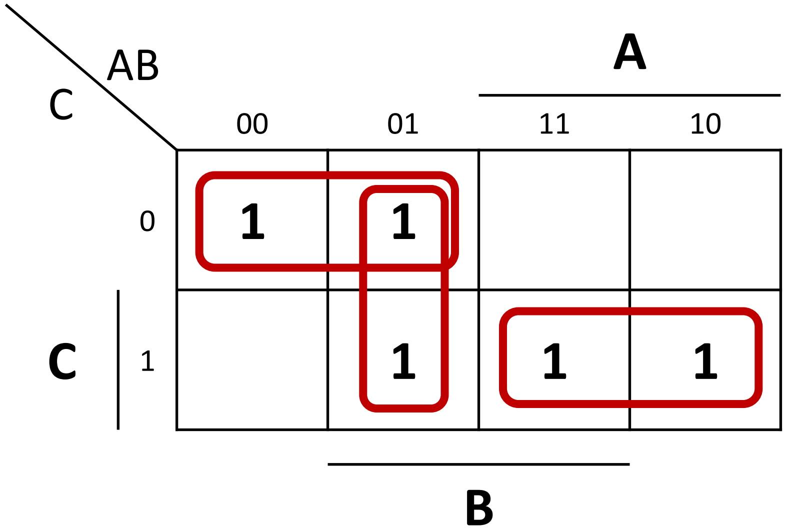
$$f = (\mathrm{A} + \mathrm{C})(\overline{B} + \overline{C})$$

Minimizirajte funkciju

$$f(A, B, C) = \sum(0, 2, 3, 5, 7)$$

Rješenje

A	B	C	y
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	
1	0	1	1
1	1	0	
1	1	1	1

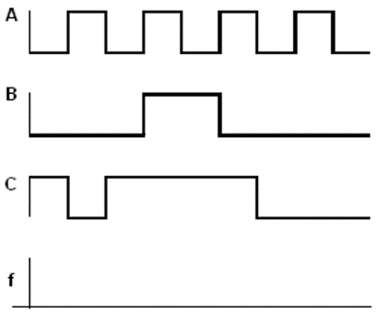


$$y = f(A, B, C) = \sum (0, 2, 3, 5, 7)$$

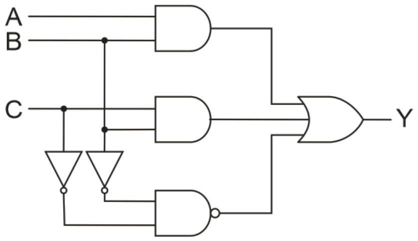
$$f = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B + AC$$

Primjeri zadataka s prethodnih ispita*

Ishod učenja 4 – 9 bodova - 25 min



1. **[I4_M / 2 boda]** Nacrtajte karakteristične simbole (u oba standarda) logičkog sklopa **ILI** s tri ulaza (0,5 bodova) i napišite tablicu kombinacija (0,5 bodova). Za zadani vremenski dijagram promjena ulaznih varijabli nacrtajte izlaznu funkciju (1 bod)
2. **[I4_M / 2 boda]** Za zadanu logičku shemu napišite logičku funkciju (1 bod) i tablicu kombinacija (1 bod)



3. **[I4_Ž / 3 boda]** Nacrtajte logičku shemu funkcije $\boldsymbol{f} = (\overline{\boldsymbol{AC}} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{B}}$ ostvarene samo logičkim sklopovima I, ILI, NE (1 bod). Primjenom De Morganovih teorema transformirajte (1 bod) i nacrtajte (1 bod) izvedbu funkcije koja koristi samo **NI** logičke sklopove.
4. **[I4_Ž / 2 boda]** Pomoću K-tablice minimizirajte funkciju $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}) = \sum(\mathbf{0},1,\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{13},\mathbf{15})$. (1 bod za korektno ispunjenu tablicu, 1 bod za korektno napisanu potpuno minimiziranu funkciju)

* Primjer ispita je ilustrativan. Vrste zadataka na budućim brzim testovima i ispitima mogu biti drugačije.

LITERATURA:

- Uroš Peruško: Digitalni sustavi
    - Str. 129 - 147