



**ALGEBRA
BERNAYS**
SVEUČILIŠTE

**MATEMATIČKA
ANALIZA**

Derivacije

Derivacija

Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Francuski matematičar, pravnik, pjesnik...

Početkom 17. stoljeća razvio metode određivanja ekstrema i tangenti krivulja koje su blisko vezane uz teoriju koju danas nazivamo diferencijalnim računom.

Njegov rad na tangentama poslužio je i kao neposredna inspiracija Isaacu Newtonu.

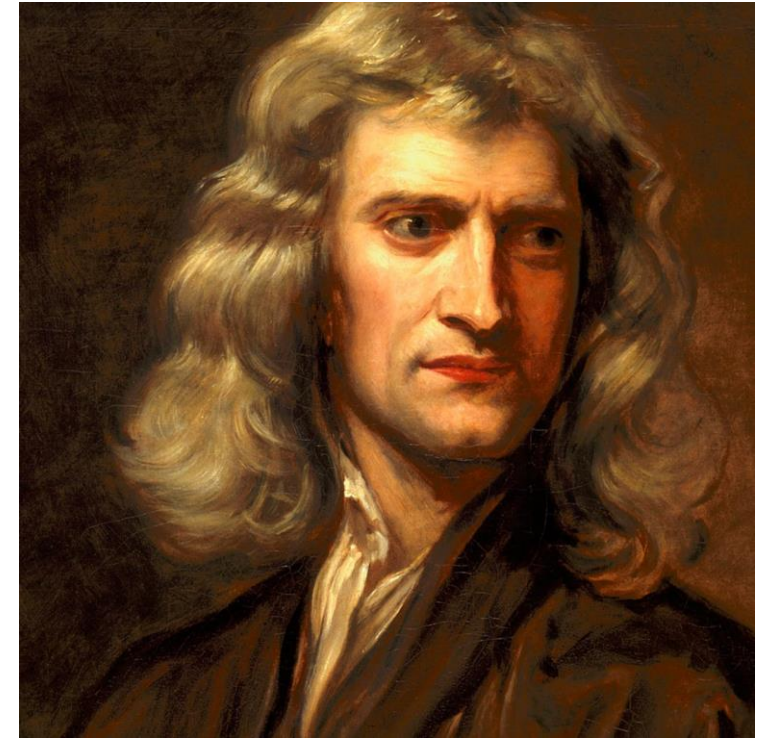


Derivacija

Za razvoj diferencijalnog računa danas smatramo zaslužnima dva velika znanstvenika:

Isaac Newton (1642 – 1727)

Engleski fizičar, matematičar,
astronom ...



Derivacija

Za razvoj diferencijalnog računa danas smatramo zaslužnima dva velika znanstvenika:

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 – 1716)

Njemački matematičar, filozof,
diplomat...



Isaac Newton

Newton je kao fizičar proučavao gibanje tijela.

Tri Newtonova zakona:

- Zakon inercije (gibanje je jednoliko ako nema vanjske sile)
- Temeljni zakon gibanja ($F = m \cdot a$)
- Zakon akcije i reakcije

Drugi zakon se temelji na proučavanju kretanja tijela, njegove akceleracije, odnosno brzine.

Isaac Newton

Osnovno pitanje: **Što je brzina?**

$$\text{brzina} = \frac{\text{put}}{\text{vrijeme}} \qquad v = \frac{s}{t}$$

To je prosječna brzina, budući jedino možemo mjeriti prijeđeni put u nekom mjerljivom vremenskom periodu.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Isaac Newton

Brzina u nekom malom vremenskom periodu, Δt :

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Brzinu u trenutku dobijemo prelaskom na limes, $\Delta t \rightarrow 0$:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Gottfried Wilhelm Leibniz

Problem tangente: „Kako za funkciju $f(x)$ odrediti
jednadžbu tangente u točki $T(x_0, f(x_0))$? ”

Ideja:

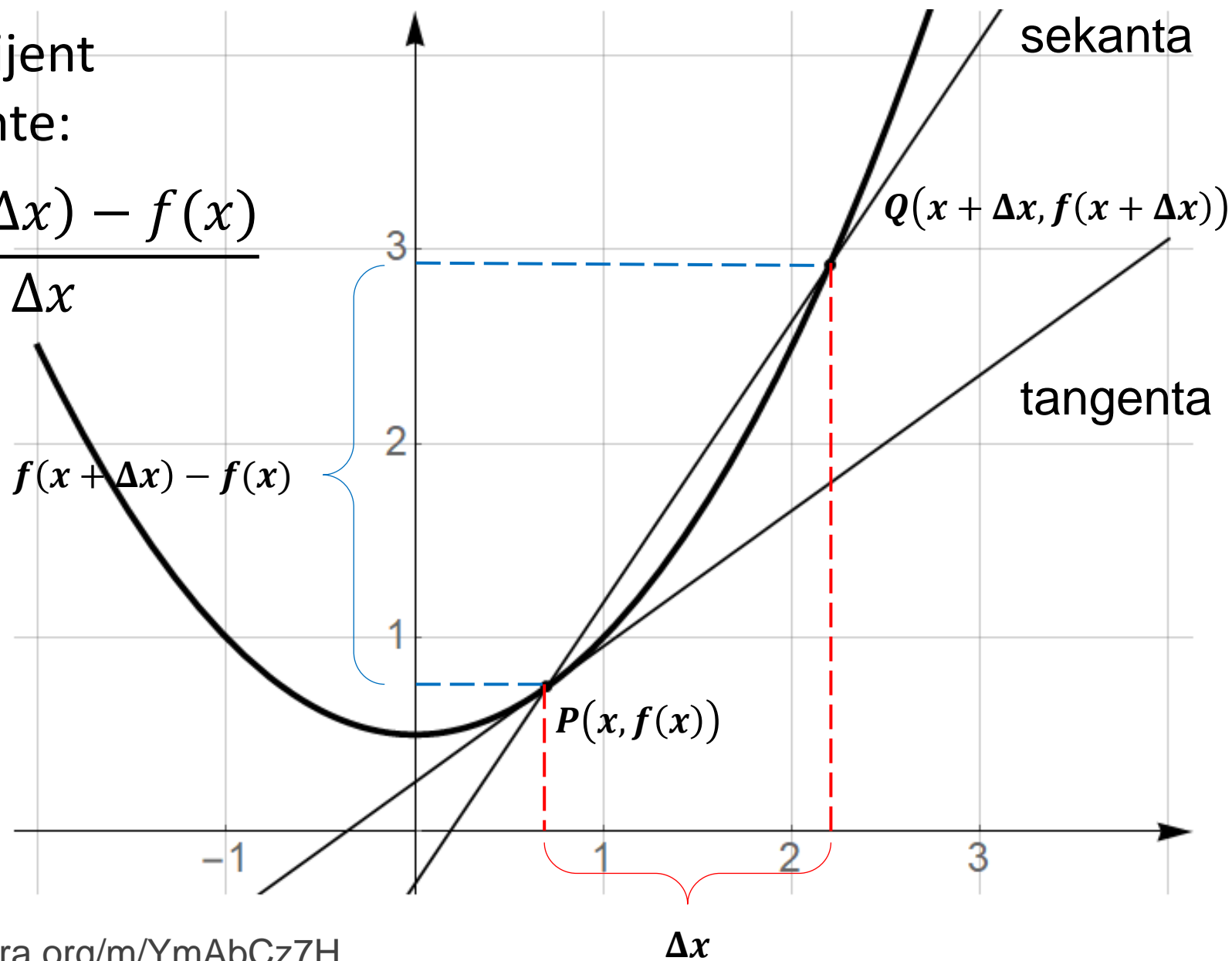
- provući sekantu kroz dvije točke na krivulji

$$P(x, f(x)) \text{ i } Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$$

- približavati te dvije točke dok ne postanu jedna, $Q \rightarrow P$
- tada sekanta postaje tangenta

Nagib (koeficijent smjera) sekante:

$$k_s = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



<https://www.geogebra.org/m/YmAbCz7H>

Gottfried Wilhelm Leibniz

Nagib (koeficijent smjera) sekante određen je formulom za jednadžbu pravca kroz dvije točke:

$$k_s = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Kada točku Q približimo točki P , tj. za $\Delta x \rightarrow 0$, dobivamo jednadžbu za koeficijent smjera tangente:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Derivacija

Vidimo kako se u analizi problema brzine i problema tangente pojavljuje isti limes.

Vrijednost tog limesa (ako postoji) nazivamo derivacijom funkcije $f(x)$ u točki x_0 , koju obilježavamo s $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

pri čemu funkcija $f(x)$ mora biti definirana na nekoj (otvorenoj) okolini točke $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Derivacija

Za derivaciju se kroz povijest (ali i danas) koristi nekoliko različitih oznaka:

1. $f'(x_0)$ - Lagrangeov (Newtonov) zapis
2. $\frac{df}{dx}(x_0)$ - Leibnitzov zapis
3. $Df(x_0)$ - Cauchyjev zapis

<https://www.youtube.com/watch?v=axZTv5YJssA>

Računanje derivacije po definiciji

1. Pomoću definicije derivirajte funkciju $f(x) = 3x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

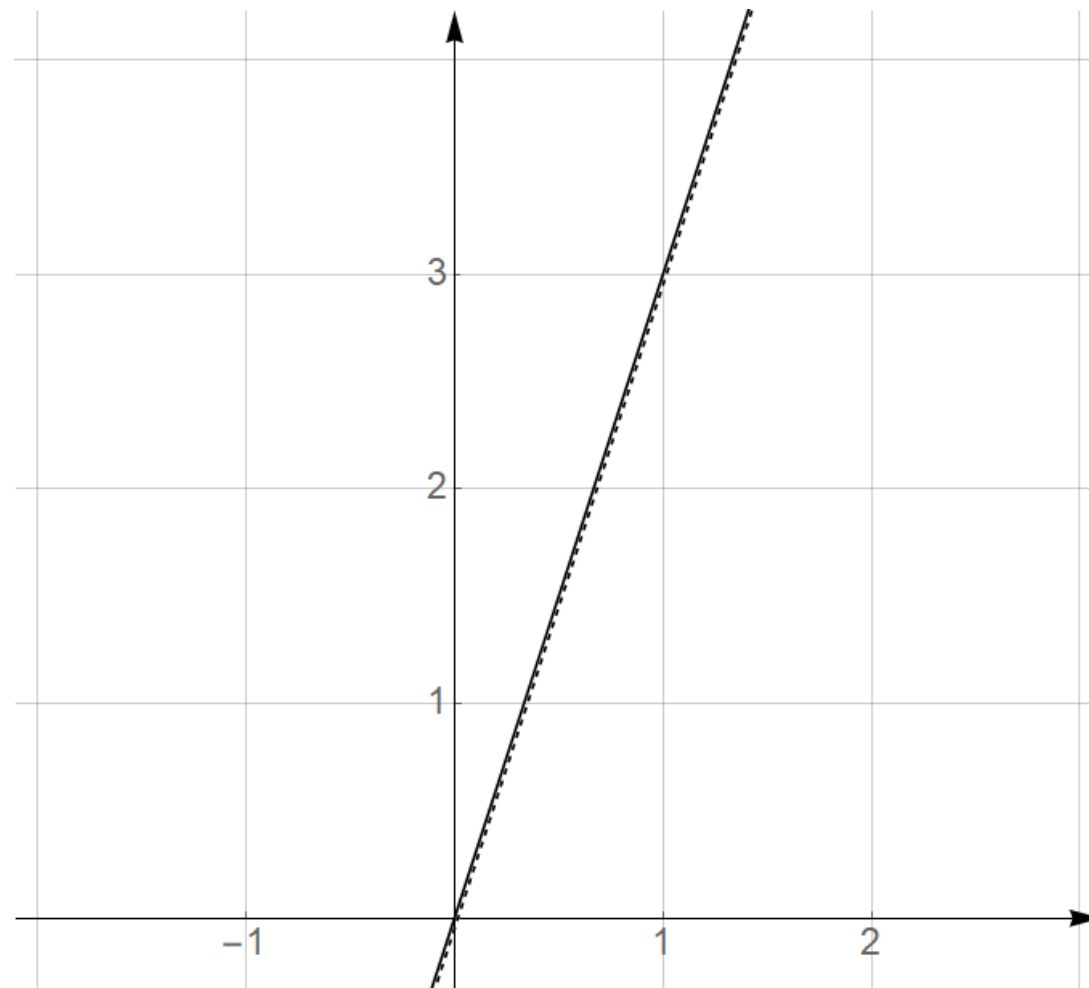
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3(x + \Delta x) - 3x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x + 3\Delta x - 3x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 = 3$$

Računanje derivacije po definiciji

Dakle, tangenta na pravac $y = 3x$, je pravac s nagibom $k_t = 3$.

Svaki pravac je sam svoja tangenta, odnosno za svaki pravac $f(x) = ax + b$ vrijedi $f'(x) = a$.



Računanje derivacije po definiciji

2. Pomoću definicije derivirajte funkciju $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot (2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Računanje derivacije po definiciji

3. Pomoću definicije derivirajte funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x(x + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Računanje derivacije po definiciji

4. Pomoću definicije derivirajte funkciju $f(x) = \sqrt{x}$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Derivacija opće potencije

Derivacija funkcije $f(x) = x^n$ dana je s

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Derivacija opće potencije

5. Odredite derivaciju funkcije $f(x)$:

a) $f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$

b) $f(x) = x$ $f'(x) = 1$

c) $f(x) = 3$ $f'(x) = 0$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

Derivacija opće potencije

5. Odredite derivaciju funkcije $f(x)$:

$$\text{e)} \quad f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{f)} \quad f(x) = \sqrt[4]{x^5} = x^{\frac{5}{4}} \qquad f'(x) = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x}$$

$$\text{g)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{6}} \qquad f'(x) = \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6 \sqrt[6]{x^5}}$$

Video materijali

Aleksandar Hatzivelkos:

1. Računanje derivacije po definiciji:

<https://www.youtube.com/watch?v=dfg3IXHOPG0>

Hvala 😊