

A large, stylized logo of the University of Bern, featuring a thick, curved line in shades of orange and pink that forms a shape reminiscent of a stylized 'A' or a mountain peak.

**ALGEBRA
BERNAYS**
SVEUČILIŠTE

**MATEMATIČKA
ANALIZA**

**Diferencijalne
jednadžbe**

Diferencijalne jednačbe

Diferencijalna jednačba je jednačba koja sadrži i derivaciju funkcije koju želimo odrediti.

Diferencijalne jednačbe razlikujemo po stupnju derivacije funkcije koja se u njoj pojavljuje:

- diferencijalne jednačbe prvog reda (sadrže y')
- diferencijalne jednačbe drugog reda (sadrže y'')
- diferencijalne jednačbe višeg reda (sadrže više derivacije funkcije y)

Diferencijalne jednađbe

Diferencijalne jednađbe koristimo u modeliranju mnogih problema koji uključuju brzinu promjene neke veličine.

Na primjer, u fizici se horizontalna i vertikalna komponenta kretanja tijela može opisati slijedećim diferencijalnim jednađbama:

$$m \cdot x''(t) = 0$$

$$m \cdot y''(t) = -mg$$

Radi se o jednađbama koje slijede iz drugog Newtonovog zakona gibanja: $F = m \cdot a$

Diferencijalne jednačbe

U epidemiologiji je poznat tzv. SIR-model kojim se pomoću diferencijalnih jednačbi opisuje širenje epidemije u populaciji.

$S(t)$ – broj nezaraženih pojedinaca (**S**usceptible)

$I(t)$ – broj zaraženih pojedinaca (**I**nfectious)

$R(t)$ – broj oporavljenih pojedinaca (**R**emoved)

$$S' = -\beta \frac{I S}{n} \qquad I' = \beta \frac{I S}{n} - \gamma I \qquad R' = \gamma I$$

Diferencijalne jednačbe

Općenito, diferencijalna jednačba prvog reda je jednačba oblika

$$f(x, y, y') = 0$$

Postoji više tipova diferencijalnih jednačbi prvog reda:

- separabilne $y' = f(x) \cdot g(y)$
- linearne $y' + p(x) \cdot y = q(x)$
- Bernoullijeva $y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$
- \vdots

Separabilne diferencialne enačbe

Separabilne diferencialne enačbe prvega reda se lahko zapisajo v obliki

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Kod tega tipa diferencialnih enačb funkcijo s desne strani lahko zapišemo v obliki produkta dveh funkcij f in g , kjer sta *razdvojene* (separirane) spremenljivki x in y .

Separabilne diferencijalne jednačbe

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Postupak rješavanja:

1. Umjesto y' pišemo $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

2. Separiramo jednačbu

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

3. Integriramo jednačbu

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Primjer 1. Riješite diferencijalnu jednačbu

$$2xy y' = 1$$

$$2xy \frac{dy}{dx} = 1$$

$$y^2 + c_1 = \ln|x| + c_2 - c_1$$

$$2y dy = \frac{dx}{x}$$

$$y = \pm \sqrt{\ln|x| + c}$$

$$\int 2y dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$y_1 = \sqrt{\ln|x| + c}$$

$$y_2 = -\sqrt{\ln|x| + c}$$

OPĆE RJEŠENJE
DIFERENCIJALNE
JEDNAČBE

Separabilne diferencijalne jednačbe

Vidimo kako je rješenje diferencijalne jednačbe zapravo *klasa* beskonačno mnogo funkcija.

Svaka nova vrijednost neodređene konstante c daje novo rješenje diferencijalne jednačbe.

Tu klasu funkcija nazivamo **općim rješenjem** diferencijalne jednačbe.

Separabilne diferencijalne jednačbe

Diferencijalna jednačba je ponekad zadana s dodatnim uvjetom kojeg rješenje mora ispuniti, $y(x_0) = y_0$.

Takav uvjet nazivamo **početnim uvjetom**.

Diferencijalna jednačba koja je zadana zajedno s početnim uvjetom naziva se **Cauchyjev problem**.



Separabilne diferencijalne jednađbe

Cauchyjev problem rješavamo tako da prvo odredimo opće rješenje zadane diferencijalne jednađbe.

Potom u opće rješenje uvrstimo vrijednosti iz zadanog početnog uvjeta, i iz dobivene jednađbe odredimo vrijednost konstante c .

Rješenje s tako određenom vrijednosti konstante c nazivamo **partikularnim rješenjem** diferencijalne jednađbe.

Primjer 2. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednačbe $\frac{x^2}{y} y' = 1$ za koju vrijedi $y(1) = \frac{2}{e}$.

$$\frac{x^2}{y} y' = 1$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x^{-2} dx$$

$$y = e^{-\frac{1}{x}} \cdot e^c$$

$$\frac{x^2}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\ln y = -\frac{1}{x} + c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x^2} dx$$

$$y = e^{-\frac{1}{x} + c}$$

OPĆE RJEŠENJE

Primjer 2. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednačbe $\frac{x^2}{y} y' = 1$ za koju vrijedi $y(1) = \frac{2}{e}$.

U opće rješenje uvrštavamo $x = 1, y = \frac{2}{e}$.

$$\frac{2}{e} = c \cdot e^{-1}$$

$$\frac{2}{e} = \frac{c}{e}$$

$$c = 2$$

$$y = 2e^{-\frac{1}{x}}$$

PARTIKULARNO
RJEŠENJE

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

OPĆE RJEŠENJE

Separabilne diferencijalne jednačbe

Separabilne diferencijalne jednačbe često se pojavljuju u primjeni, pogotovo kada opisujemo procese koji su proporcionalni brzini promjene.

Na primjer, problem rasta snježne kugle:

- brzina rasta polumjera snježne kugle proporcionalna je površini snježne kugle
- površina snježne kugle proporcionalna je kvadratu polumjera snježne kugle

Problem rasta snježne kugle:

- brzina rasta polumjera snježne kugle proporcionalna je površini snježne kugle

$r(t)$ – polumjer snježne kugle u trenutku t

$$\frac{dr}{dt} = k_1 \cdot P$$

- površina snježne kugle proporcionalna je kvadratu polumjera snježne kugle

$$P = k_2 \cdot r^2$$

$$\frac{dr}{dt} = k_1 \cdot P = k_1 \cdot (k_2 \cdot r^2) = k \cdot r^2$$

Zadatak: Snježna kugla u početnom trenutku ima radijus od 2 cm. Nakon 10 sekundi kotrljanja niz padinu, radijus snježne kugle je narastao na 5 cm.

Koliki će biti radijus snježne kugle 15 sekundi nakon početka kotrljanja?

$$\frac{dr}{dt} = k \cdot r^2$$

$$\frac{dr}{r^2} = k \, dt$$

$$\int \frac{dr}{r^2} = \int k \, dt$$

$$-\frac{1}{r} = k \cdot t + c$$

$$\frac{1}{r} = -k \cdot t - c$$

$$r(t) = \frac{1}{-k \cdot t - c}$$

Zadatak: Snježna kugla u početnom trenutku ima radijus od 2 cm. Nakon 10 sekundi kotrljanja niz padinu, radijus snježne kugle je narastao na 5 cm.

Koliki će biti radijus snježne kugle 15 sekundi nakon početka kotrljanja?

$$r(t) = \frac{1}{-k \cdot t - c}$$

$$r(0) = 2$$

$$c = -0.5$$

$$r(t) = \frac{1}{-k \cdot t + 0.5}$$

$$r(10) = 5$$

$$k = 0.03$$

$$r(t) = \frac{1}{-0.03 \cdot t + 0.5}$$

Zadatak: Snježna kugla u početnom trenutku ima radijus od 2 cm. Nakon 10 sekundi kotrljanja niz padinu, radijus snježne kugle je narastao na 5 cm.

Koliki će biti radijus snježne kugle 15 sekundi nakon početka kotrljanja?

$$r(t) = \frac{1}{-0.03 \cdot t + 0.5} \quad r(15) = \frac{1}{-0.03 \cdot 15 + 0.5} = 20$$

Radijus snježne kugle 15 sekundi nakon početka kotrljanja će iznositi 20 cm.

„Predator-prey” model

U prirodi postoji dinamička ravnoteža između broja predatora (životinja koje love druge životinje) i lovine.

Početakom 20. stoljeća, Lotka i Volterra predložili su model koji opisuje kretanje populacije predatora $x(t)$ i lovine $y(t)$ u vremenu.



„Predator-prey” model

Ako nema lovine, populacija predatora se smanjuje brzinom koja je proporcionalna samoj populaciji predatora.

Ako ima lovine, populacija predatora raste brzinom koja je proporcionalna umnošku veličine populacije predatora i populacije lovine.

$$\frac{dx}{dt} = -p \cdot x + q \cdot xy$$

„Predator-prey” model

Ako nema predatora, populacija lovine raste brzinom koja je proporcionalna veličini populacije lovine.

Ako ima predatora, populacija lovine se smanjuje brzinom koja je proporcionalna umnošku veličine populacije predatora i populacije lovine.

$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y - s \cdot xy$$

„Predator-prey” model

$$\frac{dx}{dt} = -p \cdot x + q \cdot xy$$

$$\frac{dy}{dt} = r \cdot y - s \cdot xy$$

Ako podijelimo te dvije jednačbe, dobivamo:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{r \cdot y - s \cdot xy}{-p \cdot x + q \cdot xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y (r - sx)}{x (qy - p)}$$

Tako smo dobili diferencijalnu jednačbu koja opisuje odnos veličina populacije predatora i lovine.

„Predator-prey” model

Riješimo tu diferencijalnu jednađbu za zadane vrijednosti parametara p, q, r, s :

Zadatak: Riješite diferencijalnu jednađbu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(4 - 2x)}{x(y - 3)}$$

tako da rješenje prolazi kroz točku $(1, e)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(4 - 2x)}{x(y - 3)}$$

$$\frac{y - 3}{y} dy = \frac{4 - 2x}{x} dx$$

$$\int \frac{y - 3}{y} dy = \int \frac{4 - 2x}{x} dx \quad \int \left(1 - \frac{3}{y}\right) dy = \int \left(\frac{4}{x} - 2\right) dx$$

$$y - 3 \ln|y| = 4 \ln|x| - 2x + c$$

Uvrstimo točku $(1, e)$.

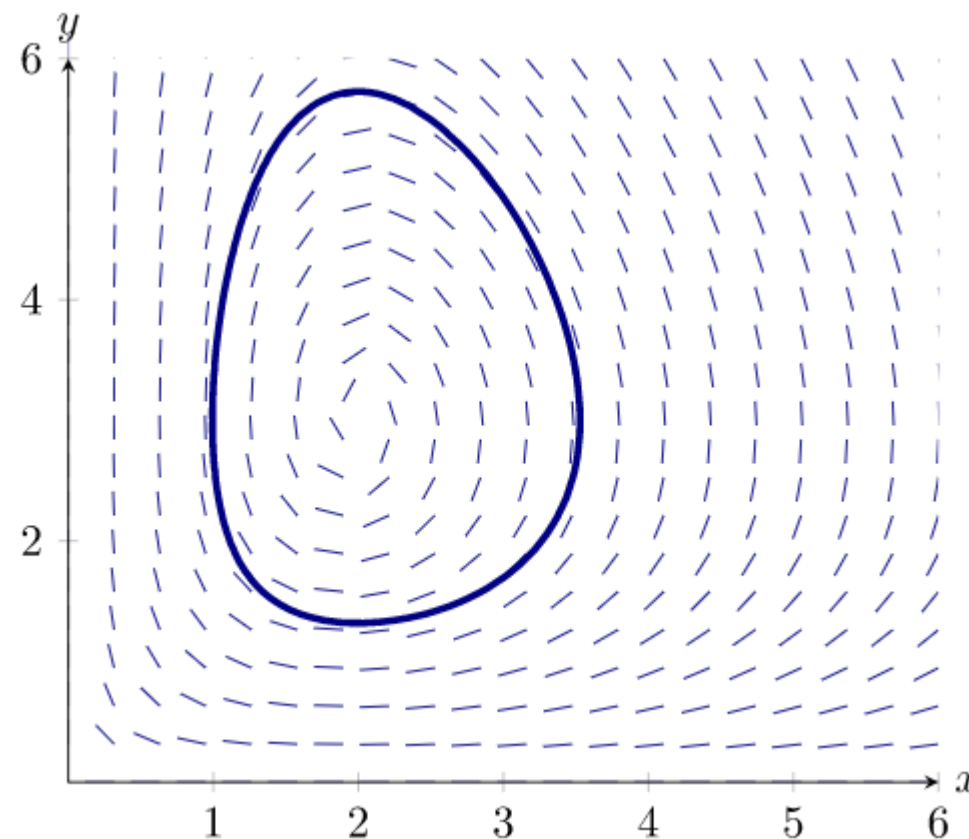
$$e - 3 \ln e = 4 \ln 1 - 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = e - 1$$

$$y - 3 \ln|y| = 4 \ln|x| - 2x + e - 1$$

„Predator-prey” model

$$y - 3 \ln|y| = 4 \ln|x| - 2x + e - 1$$

Rješenje je implicitno zadana funkcija $y(x)$ koja pokazuje kolika je veličina populacije lovine y u odnosu na veličinu populacije predatora x .



Newtonov zakon hlađenja

Neka je temperatura kave u šalici 70°C , te se nalazi u sobi temperature 20°C .

Diferencijalna jednačina koja opisuje promjenu temperature kave u vremenu, $T(t)$, dana je Newtonovim zakonom hlađenja:

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - 20)$$

gdje je k neka konstanta proporcionalnosti.

Newtonov zakon hlađenja

$$\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - 20)$$

$$\frac{dT}{T - 20} = -k dt$$

$$\int \frac{dT}{T - 20} = \int -k dt$$

$$\ln |T - 20| = -k \cdot t + c$$

$$T - 20 = e^{-k \cdot t + c}$$

$$T = 20 + c \cdot e^{-k \cdot t}$$

Newtonov zakon hlađenja

$$T(t) = 20 + c \cdot e^{-k \cdot t}$$

Konstantu integracije c možemo izračunati iz početnog uvjeta da je temperatura kave u šalici na početku (dakle za $t = 0$) jednaka 70°C .

$$70 = 20 + c \cdot e^0$$

$$c = 50$$

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-k \cdot t}$$

Newtonov zakon hlađenja

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-k \cdot t}$$

No za određivanje konstante proporcionalnosti k , treba nam neka dodatna informacija.

Izračunati ćemo vrijednost te konstante pomoću dodatnog podatka da se temperatura kave u šalici nakon jedne minute spustila za 2°C , tj. da je $T(1) = 68$.

Newtonov zakon hlađenja

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$$T(1) = 68$$

$$68 = 20 + 50 \cdot e^{-k} \quad \Rightarrow \quad e^{-k} = 0.96 \quad \Rightarrow \quad k = 0.0408$$

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-0.0408 \cdot t}$$

Kada je poznata funkcija promjene temperature kave, moguće je odgovoriti na razna pitanja.

Newtonov zakon hlađenja

$$T(t) = 20 + 50 \cdot e^{-0.0408 \cdot t}$$

1) Kolika će biti temperatura kave nakon 20 minuta?

$$T(20) = 20 + 50 \cdot e^{-0.0408 \cdot 20} = 42.1$$

2) Nakon kojeg vremena će temperature kave biti 35°C?

$$35 = 20 + 50 \cdot e^{-0.0408 \cdot t} \qquad e^{-0.0408 \cdot t} = 0.3$$

$$-0.0408 t = \ln 0.3 \qquad t = 29.5$$

Video materijali

- https://www.youtube.com/watch?v=T39QWjsTI6s&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=2
- https://www.youtube.com/watch?v=IQ5tQwvj8oI&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=3
- https://www.youtube.com/watch?v=OXdwTZb7700&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=4
- https://www.youtube.com/watch?v=GKvx6sG_Uc4&list=PLcWN1hq0ODxnNIVevnKFqN5A3HhCALr_C&index=5

Hvala 😊